Groupe A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

I

N. B. — Seul le résultat de la partie *a* sert dans la suite.

a. Montrer qu'il existe une suite de nombres réels a_i, $i \in \mathbb{N}$, telle que pour tout entier $p \geqslant 0$, la série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \, 2^{ip}$ soit absolument convergente, de somme $(-1)^p$. (Si N est un entier > 0, on pourra tout d'abord calculer une famille $a_{i,N}$, $0 \leqslant i < N$, telle que :

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_{i,N} \, 2^{ip} = (-1)^p \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant p < N.)$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on pose :

$$\theta_k(x) = \prod_{i=0}^{k} \left(1 - \frac{x}{2^i}\right).$$

Montrer que la suite $\theta_k(x)$ admet une limite quand $k \to \infty$. On notera cette limite $\theta(x)$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \theta(x)$ est développable en série entière de rayon de convergence infini.

c. Montrer que le problème étudié en *a.* admet plusieurs solutions.

Tournez la page S. V. P.

Soit n un entier $\geqslant 0$. On note $P \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'ensemble des points $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tels que $u \geqslant 0$, et $\dot{P}$ l'intérieur de P.

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application continue définie par

$$\gamma(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \leqslant 1 \\ -e^{\frac{1}{(u-1)(u-2)}} & \text{si} \quad 1 < u < 2. \\ 0 & \text{si} \quad u \geqslant 2 \end{cases}$$

On pose :

$$C(u) = 1 + \lambda \int_0^u \gamma(t)\, dt$$

où λ est choisi de telle façon que $C(2) = 0$.

Pour toute application $\Phi : P \to \mathbb{R}$, on définit l'application $E(\Phi) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par :

$$E(\Phi)(u, v) = \begin{cases} \Phi(u, v) & \text{si} \quad u \geqslant 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad C(-2^i u) \quad \Phi(-2^i u, v) & \text{si} \quad u < 0 \end{cases}$$

où (a_i) est la suite déterminée en I.*a.*

Montrer que la fonction $E(\Phi)$ est de classe C^p si et seulement si

1° La restriction de Φ à $\dot{P}$ est de classe C^p;

2° Les dérivées partielles d'ordre $\leqslant p$ de Φ dans $\dot{P}$ se prolongent continûment à P.

III

a. Soient p un entier > 0 et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^p telle que :

$$f(x, v) = f(-x, v) \quad \text{pour} \quad (x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

.../...

E. N. S. SEVRES ET ULM 1980

Montrer qu'il existe une application continue $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x, v) = g(x^2, v) \quad \text{pour} \quad (x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Pour quelles valeurs de p peut-on choisir g de classe C^1?

b. Quelle est la meilleure classe de différentiabilité qu'on peut donner à g si on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire sur f ? Étudier le cas où f est de classe C^∞.

c. Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^p, telle que :

$$h(x, v) = -h(-x, v) \quad \text{pour} \quad (x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Montrer qu'il existe une application continue $j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que :

$$h(x, v) = x\, j(x^2, v)$$

Préciser la classe de différentiabilité qu'on peut donner à j.

IV

a. Soient S et T deux applications de classe C^∞ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} S(-u_1, -u_2, v) = S(u_1, u_2, v) \\ T(-u_1, -u_2, v) = -T(u_1, u_2, v) \end{cases}$$

pour tout $(u_1, u_2, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe des applications de classe C^∞ $\sigma_i, \tau_i\ (i = 1,2)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$S(u_1, u_2, v) = \sigma_1(u_1^2, u_2^2, v) + u_1 u_2\, \sigma_2(u_1^2, u_2^2, v)$$

$$T(u_1, u_2, v) = u_1\, \tau_1(u_1^2, u_2^2, v) + u_2\, \tau_2(u_1^2, u_2^2, v)$$

pour tout $(u_1, u_2, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

b. Étendre les résultats précédents au cas des fonctions S et T de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$S(-u, v) = S(u, v)$$

$$T(-u, v) = -T(u, v)$$

pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Tournez la page S. V. P.

V

a. Soit p un entier $\geqslant 2$. Soient a et b deux applications de classe C^p de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, et A une application de classe C^p de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $(x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ on pose :

$$B(x, v) = x^2 + a(v)\, x + b(v)$$

Montrer qu'il existe des applications continues :

$$Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$R_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$R_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

telles que pour tout $(x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ on ait :

$$A(x, v) = B(x, v)\, Q(x, v) + x\, R_1(v) + R_2(v) \tag{1}$$

[on pourra se ramener au cas où $a(v) = 0$, et où $A(-x, v) = \pm A(x, v)$].

b. Les fonctions Q, R_1, R_2 sont-elles uniquement déterminées par la relation (1)? De quelles classes de différentiabilité peut-on choisir Q, R_1, R_2 ?

c. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^p telle que :

$$\begin{cases} F(0, 0) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe deux fonctions numériques continues α, β définies dans un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$, nulles en 0, un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$, et une fonction numérique G définie sur $I \times V$, non nulle en (0, 0), tels que pour $(x, v) \in I \times V$ on ait :

$$F(x, v) = (x^2 + \alpha(v)\, x + \beta(v))\, G(x, v)$$

[On pourra ajouter aux coordonnées de v deux nouvelles variables indépendantes α et β, appliquer les résultats de V.*a* et montrer alors qu'on peut choisir des fonctions $v \longmapsto \alpha(v)$, $v \longmapsto \beta(v)$ de façon à annuler R_1 et R_2.]

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail